TECHNICAL RESEARCH REPORT

Résidus, Courants Résiduels et Courants de Green

by C.A. Berenstein, R. Gay, and A. Yger

T.R. 94-70

INSTITUTE FOR SYSTEMS RESEARCH

Sponsored by
the National Science Foundation
Engineering Research Center Program,
the University of Maryland,
Harvard University,
and Industry

Résidus, Courants résiduels et Courants de Green (*)

Carlos A. Berenstein, Roger Gay, and Alain Yger

English abstract

Some explicit formulas are provided in order to solve division problems in commutative algebra or questions related to intersection theory; it is shown here how the idea of analytic continuation of distributions leads to some explicit solution for the Green equation for algebraic complete intersections in the projective space.

§1. Introduction

Le théorème de dualité (dans ses versions locales ou globales, ([GRH], chapitre 6)) est l'une des propriétés majeures du résidu de Grothendieck attaché à un système de fonctions analytiques, ou de polynômes définissant une intersection complète dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$. C'est grâce à ce théorème que l'on a pu récemment établir, pour résoudre certains problèmes de division, des identités analytiques ou algébriques qui s'avèrent en général les plus économiques possibles.

Le résidu de Grothendieck, pour les besoins de l'analyse, peut être étendu en un courant, et ce suivant deux approches commodes, toutes deux inspirées des transformations de Mellin; si $f_1, ..., f_p$ définissent une intersection complète dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^n$ et si β ($\beta = (\beta_1, ..., \beta_p)$) est un $p-$ uplet d'entiers positifs, on définit, pour toute forme test du type $(n, n-p)$,

$$< \bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}(\frac{1}{f_j^{\beta_j+1}}),\ \varphi >= C_{p,\beta} \left((\sum_{j=1}^{p} \lambda_j) \int \prod_{j=1}^{p} (|f_j|^{2\lambda_j} \bar{f}^{\beta_j}) \frac{\bar{\partial} f \wedge \varphi}{||f||^{2(p+|\beta|)}} \right)_{\vec{\lambda} = \vec{0}}$$

avec $|\beta| := \beta_1 + ... + \beta_p$, la notation $(.)_0$ signifiant que l'on suit le prolongement analytique de l'expression (fonction de $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$) jusqu'à l'origine (au voisinage de laquelle le prolongement est en fait holomorphe), la constante valant

$$C_{p,\beta} = \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi)^p} \frac{(p-1+|\beta|)!}{\beta!};$$

(*) This paper is a preliminary report. The research therein was supported in part by NSA-grant MDA90493H3012 and NSF grants DMS9225043 and CDR8803012.

lorsque φ est $\overline{\partial}$ fermée au voisinage des zéros des f_j, on retrouve l'action du résidu de Grothendieck relatif à

$$(f_1^{\beta_1+1},...,f_p^{\beta_p+1})\,.$$

L'action du courant résiduel peut aussi être définie par

$$< \bigwedge_{j=1}^{p} \bar{\partial}(\frac{1}{f^{\beta_j+1}}),\ \varphi >= \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{(2i\pi)^p}\left(\lambda^p\int\prod_{j=1}^{p}|f_j|^{2(\beta_j+1)(\lambda-1)}\bigwedge_{j=1}^{p}\bar{\partial}f_j^{\beta_j}\wedge\varphi\right)_{\lambda=0}$$

(voir [BY2], [BGVY], pour un rappel de ces résultats).

Notre but, dans cet exposé, est de présenter deux directions dans lesquelles à la fois le rôle du résidu en géométrie algébrique et les techniques d'analyse mises en oeuvre pour décrire son action en tant que courant (via par exemple le prolongement analytique) sont mises à contribution. Ces directions s'articulent toutes les deux autour d'une question de nature complètement algébrique: celle de la mesure de la complexité dans les problèmes de l'intersection et de la division.

Dans la première partie, consacré à l'outil résidu dans les calculs algébriques, nous verrons le lien entre résidu et forme de Chow, puis nous passerons du cadre projectif au cadre torique pour donner une formulation du théorème de Bezout dans le cadre des séries de Laurent. Lorsque l'on travaille sur le schéma arithmétique $\mathbf{P}roj(\mathbb{Z}[X_0,...,X_n])$, la forme de Chow mesure (par sa hauteur, voir [Ph]) la complexité du cycle associé. Or il se trouve qu'une autre manière de contrôler cette complexité est de construire une opération de produit entre les éléments des groupes de Chow arithmétiques: le groupe de Chow d'ordre p $(1 \leq p \leq n)$ est le quotient du groupe additif des paires (Z,G) (Z cycle de codimension p, G courant de Green pour $Z(\mathbb{C})$, c'est à dire courant sur $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ tel que $dd^cG+\delta_Z$ soit lisse) par le sous groupe engendré par les éléments de $(0,\partial\mathcal{A}^{(p-1,p)}+\overline{\partial}\mathcal{A}^{(p,p-1)})$ (les $\mathcal{A}^{(\cdot,\cdot)}$ sont les espaces de courants sur $\mathbf{P}^n$) et les couples $(div(f),-i_*ln(|f|^2))$ (avec f fonction rationnelle sur Y, sous schéma de codimension $p-1$, i désignant le morphisme d'inclusion) [GS1]. Nous verrons dans la section 3 comment envisager la construction de courants de Green via le prolongement analytique en exploitant la factorisation du courant d'intégration par le courant résiduel (dans le cas intersection complète). Autant l'équation de Green joue un rôle en théorie de l'intersection, autant l'équation $\overline{\partial}(S)=\overline{\partial}(1/f_1)\wedge...\wedge\overline{\partial}(1/f_p)$ semble jouer un rôle dans le contrôle de la division, comme l'indique l'expression des quotients dans les formules de division analytiques intervenant pour reproduire l'appartenance à l'idéal dans le cas intersection complète, ou dans les versions effectives du théorème de Briançon-Skoda dans le cas général ([BGVY], [BY3]). Si elle n'est pas apparente dans cet exposé, cette idée en soutend la trame. La majeure partie des résultats présentés dans cet exposé sont partie intégrante d'un programme de travail conduit ensemble depuis déjà plusieurs années (voir [BGVY]).

§2. Le résidu de Grothendieck et la division.

Plusieurs travaux récents [Dick], [BY1], [BY2], [Elk], [GiH], ont souligné l'importance du rôle des méthodes de dualité dans les problèmes d'effectivité en géométrie algébrique.

Par sa relation avec le théorème de Briançon-Skoda (ou de Lipman-Teissier dans le cadre algébrique), la formule de Cauchy-Weil apparait comme la clef de voûte de ces méthodes.

Les résultats les plus spectaculaires concernent les problèmes de division du point de vue arithmétique; la solution du problème de Bézout algébrique, avec les meilleures bornes connues, pour des polynômes à coefficients entiers, passe pour l'instant par ce type de méthodes: si les entrées P_j sont des polynômes à coefficients entiers de degrés au plus D et de hauteurs logarithmiques au plus h, sans zéros communs dans $\mathbb{C}^n$, on peut prouver l'existence d'un entier strictement positif δ, de polynômes $A_1, ..., A_p$ à coefficients entiers, de degrés au plus $\kappa(n)D^n$, tels que

$$\delta = \sum_{j=1}^{p} A_j P_j \ , \ Max(ln|\delta|, \ h(A_j)) \leq \kappa(n) D^{8n}(h + Dln(D) + ln(p))$$

(voir [BY1], ou aussi [Elk] pour le problème de l'effectivité de l'appartenance à un idéal dont le système de générateurs choisi définit une intersection complète).

Parce que nous avons centré cet exposé autour du rôle des courants résiduels dans la mesure de la complexité des problèmes de division ou d'intersection, nous rappelons que si $P_1, ..., P_p$ sont des polynômes homogènes de $n+1$ variables, à coefficients entiers, définissant une intersection complète dans $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$, la hauteur de la forme de Chow de l'idéal homogène $(P_1, ..., P_p)$ contrôle la hauteur de Faltings du cycle correspondant dans $Proj(\mathbb{Z}[X_0, ..., X_n])$ (voir [Ph], et aussi [So], théorème 3). Rappelons que la forme de Chow d'un tel idéal est un générateur de l'idéal de $\mathbb{Q}[u_{1,0}, ..., u_{1,n}, ..., u_{n-p,0}, ..., u_{n-p,n}]$ constitué des polynômes R en les blocs de $n+1$ paramètres $U_1, ..., U_{n-p}$ $(U_j = (u_{j,0}, ..., u_{j,n}))$, tels que, si l'on note, pour tout $n+1$-uplet de variables $X = (X_0, ..., X_n)$, $< U_j, X > := \sum u_{j,k} X_k$, alors

$$\exists M \in \mathbb{N}, \ (X_1, ..., X_n)^M R(U) \subset (P_1, ..., P_p, < U_1, X >, ..., < U_{n-p}, X >);$$

ce polynôme Φ, dit aussi forme éliminante, est multihomogène par rapport à tous les blocs de variables. La forme de Chow apparait de manière évidente dans l'expression des résidus de Grothendieck

$$< \bar{\partial}(1/P_1^{k_1}) \wedge ... \wedge \bar{\partial}(1/P_p^{k_p}) \wedge \bar{\partial}(1/ < U_1, \zeta >^{l_1}) \wedge ... \wedge \bar{\partial}(1/ < U_{n-p}, \zeta >^{l_{n-p}}), \ \zeta^{*\alpha} d\zeta >,$$

où α désigne un $n+1$ -uplet d'entiers positifs, tel que $|\alpha| \leq \sum k_j D_j + \sum l_j - p, \ k \in (\mathbb{N}^*)^p, \ l \in (\mathbb{N}^*)^{n-p}$(la notation abrégée $\zeta^{*\alpha}$ est, quant à elle, utilisée pour écrire plus commodément $\zeta_0^{\alpha_0} ... \zeta_n^{\alpha_n}$) ; ces expressions s'écrivent toutes sous la forme $N_{k,l,\alpha} / \Phi^{|k|+|l|}$, où $N_{k,l,\alpha}$ est un élément de $\mathbb{Q}[U_1, ..., U_{n-p}]$. Le point à remarquer est que les numérateurs $N_{k,l,\alpha}$ de ces expressions jouent un rôle important en ce qui concerne les problèmes de division; pour en donner un exemple, nous rappelons que si les $g_{j,k}(Z, \zeta)$ constituent un système de diviseurs de Hefer pour $(P_1, ..., P_p)$ (ce qui signifie, voir par exemple [Ho], $P_j(Z) - P_j(\zeta) = \sum_k (z_k - \zeta_k) g_{j,k}(Z, \zeta)$; de tels $g_{j,k}$ s'obtiennent dans ce cas particulier via la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral), et si

$$g(Z, \zeta; U) := \bigwedge_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=0}^{n} g_{j,k}(Z, \zeta) d\zeta_k \right) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n-p} \left(\sum_{k=0}^{n} u_{j,k} d\zeta_k \right),$$

on a le résultat suivant

Théorème 2.1

Soit Q un polynôme homogène appartenant à l'idéal engendré par $P_1, ..., P_p$, de degrés respectifs $D_1, ..., D_p$; Q se représente alors sous la forme

$$\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{\substack{S\subset\{1,...,p\}\\ \#S=s}}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbf{N}^p\\ l\in\mathbf{N}^{n-p}\\ <k,D>+|l|+\sum_{j\in S}D_j\leq deg(Q)}} c_S^{k,l}\prod_{j=1}^{p}P_j^{k_j}\prod_{j=1}^{n-p}<U_j,.>^{l_j}\right)\prod_{\sigma\in S}P_\sigma\right)$$

où le polynôme $c_S^{k,l}$ vaut

$$<\bigwedge_{j=1}^{p}\bar\partial(1/P_j^{k_j+2})\wedge\bigwedge_{j=1}^{n-p}\bar\partial(1/<U_j,\zeta>^{l_j+1}),\ Q(\zeta)\left(\prod_{\substack{1\leq j\leq p\\ j\notin S}}(P_j(\zeta)-P_j)\right)g(.,\zeta;U)>.$$

Plutôt que de donner une preuve des résultats évoqués ci dessus, nous donnerons ici un résultat plus original (basé sur les mêmes idées) concernant cette fois des polynômes de Laurent (et non plus des polynômes) à diagramme de Newton précisé; nous sommes proches ici des idées introduites par Delsarte [De] et concernant les problèmes de division où interviennent comme quotients des exponentielles polynômes dont la géométrie de l'ensemble des fréquences commande les inégalités du type Lojasiewicz.

On considère n polygônes convexes de $\mathbf{R}^n$, à sommets dans $\mathbf{Z}^n$, $\Delta_1, ..., \Delta_n$, contenant tous l'origine comme point intérieur. On considère $n+1$ polynômes de Laurent $P_1, ..., P_{n+1}$ en n variables tels que

* Pour $j = 1, ..., n$, $conv(Supp(P_j)) = \Delta_j$.

* $(P_1, ..., P_n)$ est un système non dégénéré au sens de Bernstein [Be]; ceci signifie la chose suivante: pour tout n-uplet α de rationnels non tous nuls, notons pour $j = 1, ..., n$, $\Delta_j^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n, \alpha.x = min\{\alpha.y,\ y \in \Delta_j\}$ et désignons par $P_{j,\alpha}$ le polynôme extrait de P_j en ne conservant que les monômes de multiexposant appartenant au sous ensemble Δ_j^α de $\mathbf{Z}^n$; le système sera dit non dégénéré lorsque, pour tout α, les polynômes $P_{1,\alpha}, ..., P_{n,\alpha}$ n'ont aucun zéro commun dans $(\mathbf{C}^*)^n$. Notons que cette condition se ramène, pour un α fixé, à écrire qu'un certaun système de n équations algébriques à $n-1$ inconnues n'admet pas de racine dans $(\mathbf{C}^*)^{n-1}$.

* $(P_1, ..., P_{n+1})$ n'ont aucun zéro commun dans $(\mathbf{C}^*)^n$.

On notera $\mathbf{1}$ le n-uplet $(1,...,1)$ et p l'application polynomiale de $(\mathbb{C}^*)^n$ dans lui même $p = (P_1, ..., P_n)$. Pour alléger les notations ultérieures, nous noterons, si β est un n-uplet d'entiers strictement positifs

$$\bar\partial(1/p^{*\beta}) = \bar\partial(1/P_1^{\beta_1}) \wedge ... \wedge \bar\partial(1/P_n^{\beta_n}).$$

et, pour tout n-uplet de nombres complexes u et tout élément α de $\mathbb{N}^n$

$$u^{*\alpha} = \prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_j}.$$

De plus, si $\widetilde{p}$ est une application polynomiale de $(\mathbb{C}^*)^n$ dans lui même et q un polynôme en n variables, on notera

$$< \bar\partial(1/\widetilde{p}),\ q d\zeta >_{\mathbb{T}}$$

la somme complète des résidus (relatifs à l'application $\widetilde{p}$) de la forme $qd\zeta$ aux zéros de $\widetilde{p}$ dans $(\mathbb{C}^*)^n$.

Théorème 2.2

Si les $g_{j,k}$, $j = 1, ..., n+1$, $k = 1, ..., n$ sont des diviseurs de Hefer pour les polynômes de Laurent $P_1, ..., P_{n+1}$ et D le déterminant de la matrice des $g_{j,k}$, $1 \leq j,k \leq n$, on a la formule de Bézout suivante, pour tout $Z \in \mathbb{C}^n$, $z_1...z_n \neq 0$:

$$1 = < \bar\partial(1/p)(\zeta), \frac{1}{P_{n+1}(\zeta)} \begin{vmatrix} g_{1,1}(Z,\zeta) & ... & g_{n,1}(Z,\zeta) & g_{n+1,1}(Z,\zeta) \\ . & ... & . & . \\ . & ... & . & . \\ g_{1,n}(Z,\zeta) & ... & g_{n,n}(Z,\zeta) & g_{n+1,n}(Z,\zeta) \\ P_1(Z) & ... & P_n(Z) & P_{n+1}(Z) \end{vmatrix} d\zeta >_{\mathbb{T}} +$$

$$+\sum_{k,l} \delta_{k,l} \underbrace{\sum_{m\in(\mathbb{N}^n)^*}}_{l+1\notin \overset{\circ}{(m_1+1)\Delta_1 + ... + (m_n+1)\Delta_n}} < \bar\partial(1/p^{*(m+1)}), \zeta^{*l} d\zeta > Z^{*k} P_1^{m_1} ... P_n^{m_n}(Z)$$

où l'on a posé

$$D(Z,\zeta)) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n} \delta_{k,l} Z^{*k} \zeta^{*l}$$

Preuve.

Les hypothèses de non dégénérescence portant sur $P_1, ..., P_n$ assurent que $P_1, ..., P_n$ définissent une variété algébrique discrète hors des axes de coordonnées; on sait même, d'après le théorème de Bernstein [Ben] que le nombre de zéros communs (comptés avec multiplicité) est égal au volume mixte de Minkowski $V(\Delta_1, ..., \Delta_n)$ multiplié par $n!$. Désignons par $\alpha_1, ..., \alpha_N$ les zéros communs des $P_j, j = 1, ..., n,$.

Considérons des polyèdres de Weil (on trouvera la définition d'un polyèdre de Weil par exemple dans [Aiz], accompagnée d'une preuve de la formule de représentation intégrale de Cauchy-Weil que nous utiliserons plus loin) $\omega_1, ..., \omega_N$, tous composantes connexes de l'ensemble $\{\zeta;\ \zeta_1 ... \zeta_n \neq 0,\ |P_j(\zeta)| < \epsilon_j,\ j = 1, ..., n\}$ (pour un choix des ϵ_j convenable) et tels que

$$\forall j \in \{2, ..., N\},\ \exists l(j) \in \{1, ..., n\},\ \forall Z \in \omega_1,\ \forall \zeta \in \bar{\omega}_j,\ z_{l(j)} - \zeta_{l(j)} \neq 0 \qquad (2.1)$$

La construction de tels polyèdres est possible puisque les points α_j sont distincts. Notons $\sigma_1, ..., \sigma_N$ les frontières de Shilov des polyèdres de Weil $\omega_1, ..., \omega_N$.

Il existe des fonctions $w_{2,k}, ..., w_{N,k}$, $k = 1, ..., n$, avec $w_{j,k}$ holomorphe dans $\omega_1 \times \Omega_j$ (Ω_j voisinage de $\overline{\omega}_j$) telles que l'on ait, pour Z dans ω_1 et $\zeta \in \overline{\omega}_j$ $(j = 2, ..., N)$,

$$D(Z, \zeta) = \sum_{k=1}^{k=n} w_{j,k}(Z, \zeta)(P_k(Z) - P_k(\zeta)).$$

Ceci est une conséquence des formules de Cramer et de (2.1). On a alors, pour tout Z dans ω_1, en développant le noyau sous l'intégrale en série géométrique, pour tout j différent de *1*,

$$\int_{\sigma_j} \frac{D(Z, \zeta)}{\prod_{l=1}^{l=n}(P_l(\zeta) - P_l(Z))} d\zeta = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^n \\ m_k = 0}} < \bar{\partial}\Big(\frac{1}{P^{*(m+1)}}\Big),\ w_k(Z, .)P_k d\zeta > \prod_{\substack{1 \leq q \leq n \\ q \neq k}} P_q^{m_q}(Z)\ ,$$

quantité nulle d'après les propriétés du résidu. On a donc, pour tout Z dans ω_1,

$$\int_{\sigma_1} \frac{D(Z, \zeta)}{\prod_{l=1}^{l=n}(P_l(\zeta) - P_l(Z))} d\zeta = \sum_{j=1}^{j=n} \int_{\sigma_j} \frac{D(Z, \zeta)}{\prod_{l=1}^{l=n}(P_l(\zeta) - P_l(Z))} d\zeta =$$

$$= (2i\pi)^n \sum_{m \in \mathbb{N}^n} < \bar{\partial}(1/P^{m+1}), D(Z, .)d\zeta >_{\mathbb{T}} \prod_{q=1}^{q=n} P_q^{m_q}(Z)\ .$$

Cette formule peut être transformée en une identité de Bezout analytique à l'intérieur de ω_1 si l'on introduit le polynôme P_{n+1} ne s'annulant pas aux points α_j, $j = 1, ..., N$. On peut reécrire l'identité précédente comme dans [BY2] en introduisant le polynôme de Laurent $\mathbf{D}(., .)$ égal au déterminant $n + 1, n + 1$ de l'énonçé du théorème; on obtient alors, toujours pour Z dans ω_1, comme conséquence de la formule de représentation de Cauchy-Weil appliquée à la fonction *1*,

$$1 =< \bar\partial(1/p), \frac{\mathbf{D}(Z,.)}{P_{n+1}} d\zeta >_{\mathbb{T}} + \sum_{k,l} \delta_{k,l} \sum_{m \in (\mathbf{N}^n)^*} < \bar\partial(1/P^{m+1}), \zeta^{*l} d\zeta >_{\mathbb{T}} Z^{*k} \prod_{q=1}^{q=n} P_q^{m_q}(Z).$$

On utilise enfin la formule de Jacobi établie par Khovanskii [Kh] dans le cadre toroidal qui s'applique ici du fait des conditions de non dégénerescence portant sur les P_j, $j = 1, ..., n$: si P est un polynôme de Laurent dont le diagramme de Newton contient l'origine comme point intérieur et si α est un vecteur non nul de $\mathbf{R}^n$, alors, pour tout exposant strictement positif μ, on a $P^\mu_\alpha = (P_\alpha)^\mu$; ainsi, si les P_j satisfont les hypothèses de non dégénerescence mentionnées plus haut, il en est de même pour tout système correspondant à une application polynomiale du type $p^{*(m+1)}$, $m \in \mathbf{N}^n$; le fait que les zéros ne soient pas simples n'est pas un obstacle car on peut y remédier par perturbation. Le résultat de Khovanskii nous assure, que pour tout l dans $\mathbf{Z}^n$, pour tout m dans $\mathbf{N}^n$ tel que

$$l + \mathbf{1} \in \overbrace{(m_1+1)\Delta_1 + ... + (m_n+1)\Delta_n}^{\circ},$$

on a

$$< \bar\partial(1/p^{*(m+1)}), \ \zeta^{*l} d\zeta >_{\mathbb{T}} =< \bar\partial(1/p^{*(m+1)}), \ \frac{\zeta^{*(l+1)}}{\zeta_1 ... \zeta_n} d\zeta >_{\mathbb{T}} = 0.$$

On obtient la formule voulue pour Z dans ω_1, et en fait pour tout Z hors des axes, puisqu'il s'agit d'une identité entre polynômes de Laurent. $\square$

La formule que nous venons d'établir est, lorsque tous les polynômes impliqués sont à coefficients dans un sous corps $\mathbf{F}$ de $\mathbf{C}$, une formule de Bézout dans $\mathbf{F}(X_1, ..., X_n)$. Ceci résulte du lemme suivant, simple modification du lemme 2.3 de [BY1].

Lemme 2.3

Soient $p_1, ... p_{n+1}$ n polynômes de Laurent sans zéros communs dans $(\mathbf{C}^*)^n$ et tels que $p_1, ..., p_n$ définissent une variété discrète hors des axes. Soit Q un polynôme de Laurent quelconque. Si les p_j et Q sont à coefficients dans un sous corps donné $\mathbf{F}$ de $\mathbf{C}$, alors

$$< \bar\partial(1/p_1) \wedge ... \wedge \bar\partial(1/p_n), \frac{Q}{p_{n+1}} d\zeta >_{\mathbb{T}} \in \ \mathbf{F}$$

Preuve.

D'après le Nullstellensatz et les hypothèses faites sur les polynômes $p_1, ..., p_n$, il existe une famille de polynômes en une variable (à coefficients dans $\mathbf{F}$), $q_1, ..., q_n$, non nuls en *0*, et un entier M tel que l'on puisse écrire, pour tout $j \in \{1, ..., n\}$

$$(\zeta_1...\zeta_n)^M q_j(\zeta_j) = \sum_{k=1}^{k=n} q_{j,k}(\zeta) p_k(\zeta)$$

où les $q_{j,k}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{F}$. Etant donné N entier strictement positif, il existe une combinaison linéaire de la forme

$$p_{n+1} + \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j p_j^{N+1},\ \lambda_j \in \mathbf{F}$$

ne s'annulant en aucun des points ζ tels que $q_j(\zeta_j) = 0,\ j = 1, ..., n$. Si l'on choisit N suffisamment grand, on peut écrire

$$< \bar\partial(1/p_1) \wedge ... \wedge \bar\partial(1/p_n),\ \frac{Q}{p_{n+1}} d\zeta >_{\mathbb{T}} = < \bar\partial(1/p),\ \frac{Q}{p_{n+1} + \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j p_j^{N+1}} d\zeta >_{\mathbb{T}}$$

Une application de la loi de transformation globale (dans l'ouvert $U = \{\zeta_1...\zeta_n \neq 0\}$) nous conduit, si Δ désigne le déterminant de la matrice des $q_{j,k}$, à

$$< \bar\partial(1/p),\ \frac{Q}{p_{n+1}} d\zeta >_{\mathbb{T}} = < \bar\partial(1/q),\ \frac{\Delta Q}{(\zeta_1...\zeta_n)^{nM}(p_{n+1} + \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j p_j^{N+1})} d\zeta >_{\mathbb{T}}$$

et l'on est alors ramené à la preuve du lemme 2.3 de [BY1] puisque le monôme $\zeta_1...\zeta_n$ ne s'annule pas aux zéros communs des $q_j(\zeta_j)$. □

Dans l'étude des problèmes de division où intervient le résidu de Grothendieck dans le cadre torique, le résultant creux joue un rôle important. Rappelons auparavant cette notion: si $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{n+1}$ est une famille de sous ensembles finis de $\mathbf{Z}^n$ essentielle (au sens se [Stu]), on peut définir le *résultant creux attaché aux* $\mathcal{A}_j$ comme le polynôme irréductible en les variables

$$u_{1,1}, ..., u_{1,m_1}, ..., u_{n+1,1}, ..., u_{n+1,m_{n+1}}$$

définissant, dans l'espace des paramètres U, l'adhérence au sens de Zariski, dans

$$\mathbf{P}^{m_1-1}(U_1) \times ... \times \mathbf{P}^{m_{n+1}-1}(U_{n+1}),$$

de l'ensemble des U tels que les polynômes de Laurent $P_1^U, ..., P_{n+1}^U$ à supports dans $\mathcal{A}_1$,...,$\mathcal{A}_{n+1}$ et à coefficients précisés $((u_{j,k})$ pour $P_j)$ aient un zéro commun dans $(\mathbf{C}^*)^n$. Sous certaines hypothèses géométriques particulières sur les enveloppes convexes Δ_j des $\mathcal{A}_j$ (voir [BY4]), les coefficients des quotients intervenant dans la formule du théorème 2.2 (lorsqu'on l'applique aux polynômes $P_1^U, ..., P_{n+1}^U$ à supports respectifs dans $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{n+1}$ et à coefficients indéterminés) sont des fractions rationnelles en les paramètres U dont un dénominateur commun est le résultant creux relatif aux $\mathcal{A}_j$, $j = 1, ..., n+1$.

§3. Courants de Green, courants résiduels.

Dans cette section, nous allons montrer comment profiter des propriétés de factorisation du courant d'intégration sur une variété analytique complexe pour résoudre l'équation de Green relative à un cycle intersection complète.

Ce calcul est basé sur une propriété de factorisation capitale du courant d'intégration (avec multiplicités) correspondant à un système de fonctions holomorphes $f_1, ..., f_p$ qui définissent une intersection complète dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^n$; on a (voir [CoH] et, plus récemment, dans le contexte des variétés analytiques, [DM]), pour toute forme test φ de type $(n-p, n-p)$, à coefficients de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact dans ω

$$< \delta_{[f_1,...,f_p]}, \varphi > = < \bar{\partial}(1/f),\ \partial f \wedge \varphi >$$

d'où, compte tenu de ce que l'on sait sur le calcul de l'action du courant résiduel attaché à une intersection complète,

$$< \delta_{[f_1,...,f_p]}, \varphi > = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{(2i\pi)^p} \left(\lambda^p \int_{\mathbb{C}^n} |f_1 ... f_p|^{2(\lambda-1)} \overline{\partial f} \wedge \partial f \wedge \varphi \right)_0 \tag{3.1}$$

où $\overline{\partial f}$ (resp ∂f) désigne le produit extérieur des $\overline{\partial f}_j$ (resp des ∂f_j) et $(.)_0$ la prise du coefficient de Laurent correspondant à λ^0 dans le développement au voisinage de l'origine du prolongement méromorphe de la fonction de λ définie par (3.1) (correctement pour $Re(\lambda) \geq 1$). Cette approche, qui est celle que nous utiliserons plus loin, n'est pas la seule; on peut aussi montrer:

$$< \delta_{[f_1,...,f_p]}, \varphi > = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{(2i\pi)^p} (p-1)! \left(p\lambda \int_{\mathbb{C}^n} ||f||^{2p(\lambda-1)} \overline{\partial f} \wedge \partial f \wedge \varphi \right)_0 \tag{3.2}$$

où $||f||^2 = |f_1|^2 + ... + |f_p|^2$. Cette propriété résulte, dans le cas des formes φ $\bar{\partial}$-fermées au voisinage de la variété V des zéros communs des f_j, d'une application du lemme 3.13 de [BGVY]; pour les formes φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on montre, exactement comme dans la section 2 de [BGY], que les deux membres de (3.2) correspondent à l'action sur la fonction φ de distributions du type $\sum_{\alpha \in V} P_\alpha(\partial/\partial z)(\delta_\alpha)$; ainsi, si (3.2) est vraie pour les formes $\bar{\partial}$-fermées, la propriété subsiste pour toutes les formes test.

Signalons d'ailleurs ici que l'approche du courant d'intégration par le procédé (3.2) semble présenter le défaut de ne pas respecter l'aspect multiplicatif que nous avons tenu à souligner dans l'expression du courant résidu attaché à une intersection complète; on peut malgré tout remédier à cet état de fait en utilisant les formules classiques relatives à la transformée de Mellin. Il apparait aussi important (pour souligner aux fins de l'exploiter ultérieurement cet aspect multiplicatif) de donner une méthode pour calculer l'action du courant d'intégration sur une forme test φ en termes de la valeur à l'origine d'une fonction méromorphe de p variables (chaque variable correspondant à l'une des fonctions f_j) se prolongeant en une fonction holomorphe (comme fonction de p variables) au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p$.

Or il existe un tel procédé pour calculer l'action du courant résiduel dans le cas d'une intersection complète. Dans [BY2], nous avons par exemple prouvé que, si $f_1, ..., f_p$ définissent une intersection complète dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^n$ et si φ est une $(n, n-p)$ forme test dans ω, alors

$$< \bar{\partial}(1/f), \varphi >= \left(\frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} (\sum_{j=1}^{p} \lambda_j)(p-1)!}{(2i\pi)^p} \int \prod_{j=1}^{p} |f_j|^{2\lambda_j} \frac{\overline{\partial f_1} \wedge .. \wedge \overline{\partial f_p}}{||f||^{2p}} \wedge \varphi \right)_{\vec{\lambda} = \vec{0}}$$

Si l'on reprend les classiques formules de Mellin [GR], on peut aussi écrire cette expression sous la forme

$$C_p \left((\sum_{j=1}^{p} \lambda_j) \int_{\gamma + i\mathbb{R}^{p-1}} \Gamma_p^*(s) \left(\int \prod_{j=1}^{p-1} |f_j|^{2(\lambda_j - s_j)} |f_p|^{2(\lambda_p - p + |s|)} \overline{\partial f} \wedge \varphi \right) ds \right)_{\lambda=0} \qquad (3.3)$$

où γ est un $p-1$ u-plet de nombres strictement positifs tels que $|\gamma| = \sum \gamma_j < p-1$, où, pour tout $p-1$-uplet de nombres complexes s (de somme $|s|$), on note $\Gamma_p^*(s) = \Gamma(s_1)...\Gamma(s_{p-1})\Gamma(p-|s|)$, et où enfin la constante C_p vaut

$$C_p = \frac{(-1)^{p(p-1)/2}}{(2i\pi)^p}\,.$$

Ce moyen d'atteindre l'action du courant résidu s'est avéré intéressant dans l'étude des problèmes de division globaux dans les algèbres de fonctions entières avec croissance. Nous renvoyons à [BY3] pour une preuve de ces formules de représentation.

Les formules (3.1) ou (3.2) permettent aisément de construire, dans le cas où $f_1, ..., f_p$ définissent une intersection complète dans un ouvert ω de $\mathbb{C}^n$, une solution G de l'équation de Green

$$dd^c(G) = \delta_{[f_1, ..., f_p]} \qquad (3.4)$$

que l'on puisse atteindre via le prolongement analytique d'expressions impliquant les fonctions analytiques $f_1, ..., f_p$.

La formule de Stokes nous assure que, si A désigne la forme différentielle

$$A = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{k-1} f_k \partial f_1 \wedge ... \wedge \widehat{\partial f_k} \wedge ... \wedge \partial f_p$$

on a

$$\bar{\partial}\left(||f||^{2p(\lambda-1)} \bar{A} \wedge A \right) = p\lambda ||f||^{2p(\lambda-1)} \overline{\partial f} \wedge A$$

et par conséquent

$$\partial\bar{\partial}\left(||f||^{2p(\lambda-1)} \bar{A} \wedge A \right) = (p\lambda)^2 (-1)^p ||f||^{2p(\lambda-1)} \overline{\partial f} \wedge \partial f.$$

Ainsi, écrire (3.2) revient à écrire que le courant $\mathbf{G}$ défini par

$$\mathbf{G} = (-1)^{p(p-1)/2}(p-1)!\left(\frac{1}{\lambda}\,\frac{\bar{A}\wedge A}{(-2i\pi)^{p-1}}\,||f||^{2(\lambda-p)}\right)_0$$

est solution de $dd^c(\mathbf{G}) = \delta_{[f]}$.

Il existe bien sûr d'autres candidats: on peut par exemple préférer utiliser la formule (3.1) au lieu de la formule (3.2) et remarquer que, si l'on pose

$$c_p = -\frac{(-1)^{p(p+1)/2}}{(2i\pi)^{p-1}}$$

le développement de Laurent de

$$\Gamma_\lambda = \frac{c_p}{\lambda}|f_1|^{2\lambda}\bar{\partial}\left(\frac{|f_2|^{2\lambda}}{f_2}\right)\wedge ... \wedge \bar{\partial}\left(\frac{|f_p|^{2\lambda}}{f_p}\right)\wedge \partial f_2 \wedge ... \wedge \partial f_p$$

(au sens des courants), s'écrit au voisinage de *0* sous la forme

$$\frac{\delta_{[f_2=...=f_p=0]}}{\lambda} + \Gamma_0 + \lambda H(\lambda)$$

où H est une fonction à valeurs dans l'espace des $(p-1, p-1)$ courants, holomorphe au voisinage de l'origine et où Γ_0 satisfait aussi $dd^c(\Gamma_0) = \delta_{[f]}$. Il suffit pour cela de calculer $dd^c(\Gamma_\lambda)$ et de constater que ce calcul donne exactement la fonction de λ figurant au second membre de (3.1), fonction dont on sait qu'elle est holomorphe au voisinage de $\lambda = 0$ et que sa valeur en *0* vaut $\delta_{[f]}$; comme, pour toute forme test φ, le coefficient de λ^0 dans le développement de Laurent de $< dd^c(\Gamma_\lambda), \varphi > = < \Gamma_\lambda, dd^c(\varphi) >$ au voisinage de $\lambda = 0$ est $< \Gamma_0, dd^c(\varphi) > = < dd^c(\Gamma_0), \varphi >$, on a bien $dd^c(\Gamma_0) = \delta_{[f]}$ comme voulu. L'avantage de $\mathbf{G}$ sur Γ_0 est que $\mathbf{G}$ est régulier hors de l'ensemble $f_1 = ... = f_p = 0$ tandis que Γ_0 n'est régulier qu'en dehors de $\{f_1 ... f_p = 0\}$. Cependant, ce sera pour l'instant la seconde approche que nous ferons fonctionner dans le cadre, non plus des ouverts de $\mathbb{C}^n$, mais des variétés analytiques, toujours à la recherche de formules globales.

Le problème de la factorisation du courant d'intégration dans le cadre des variétés analytiques a été étudié par Demailly et Passare [DP]. Nous donnons ici une manière de résoudre l'équation de Green pour les intersections complètes, cette fois sur une variété analytique complexe (et donc avec terme correctif). Plus précisément, sur une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ de dimension n, considérons une collection de diviseurs $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_p$, tous effectifs; on suppose que les fibrés en droites $[\mathcal{D}_1], ..., [\mathcal{D}_p]$ ont des sections holomorphes globales $s_1, ..., s_p$ et que $\rho_1, ..., \rho_p$ sont des métriques sur ces fibrés en droites. Enfin, on fera l'hypothèse suivante: dans chaque carte, les s_j, exprimées en coordonnées locales, définissent une intersection complète dans l'ouvert de $\mathbb{C}^n$ en correspondance avec cette carte. On supposera même, ce qui est plus fort, que toute sous famille extraite de la famille (s_j) définit encore une intersection complète (on dira que les diviseurs se coupent proprement). Nous allons décrire un procédé itératif pour construire via des techniques de prolongement analytique, un courant $\mathbf{G}$ solution de l'équation

$$dd^c\mathbf{G} + \delta_{\mathcal{D}_1\cap...\cap\mathcal{D}_p} = c_1(\rho_1)\wedge ...\wedge c_1(\rho_p) \tag{3.5}$$

où les $c_1(\rho_j)$, $j = 1,...,p$ désignent les premières formes de Chern des fibrés hermitiens $([\mathcal{D}_j],\rho_j)$, $j = 1,...,p$. Pour cela, nous allons nous inspirer de l'approche (3.1) en la corrigeant. Considérons, pour $Re(\lambda) >> 0$, la forme différentielle s'exprimant en coordonnées locales

$$\Gamma_\lambda^{(\rho)} = c_p\lambda^{p-2}\frac{|s_1...s_p|^{2\lambda}}{(\rho_1...\rho_p)^\lambda}\bar\partial(ln(\frac{|s_2|^2}{\rho_2}))\wedge ...\wedge\bar\partial(ln(\frac{|s_p|^2}{\rho_p}))\wedge$$

$$\wedge\partial(ln(\frac{|s_2|^2}{\rho_2}))\wedge ...\wedge\partial(ln(\frac{|s_p|^2}{\rho_p})) \tag{3.6}$$

Cette forme est une forme différentielle sur $\mathcal{X}$; en suivant le prolongement analytique de $\lambda \longrightarrow \Gamma_\lambda^{(\rho)}$, on voit apparaitre, comme coefficients du développement de Laurent du prolongement méromorphe autour de *0*, des courants définis globalement sur $\mathcal{X}$. Afin de calculer $dd^c(\Gamma_0^{(\rho)})$, où le courant $\Gamma_0^{(\rho)}$ correspond au coefficient de λ^0 dans le développement de $\lambda \longrightarrow \Gamma_\lambda^{(\rho)}$ au voisinage de $\lambda = 0$, on commence par développer $\Gamma_\lambda^{(\rho)}$ avant de suivre le prolongement analytique jusqu'à l'origine de $dd^c(\Gamma_\lambda^{(\rho)})$. Ce calcul donne

$$\Gamma_\lambda^{(\rho)} = c_p(\rho_1...\rho_p)^{-\lambda}\Big(R_\lambda + W_\lambda^{(\rho)} + T_\lambda^{(\rho)}\Big),$$

où

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda}\left(\lambda^{p-1}|s_1|^{2\lambda}|s_2....s_p|^{2(\lambda-1)}\bigwedge_{j=2}^p\overline{\partial s_j}\wedge\bigwedge_{j=2}^p\partial s_j\right),$$

$$W_\lambda^{(\rho)} =$$

$$= \lambda^{p-2}|s_1...s_p|^{2\lambda}\left((-1)^{(p-1)(p-2)/2}\sum_{k=2}^p\frac{\overline{\partial s_2}}{\bar s_2}\wedge\frac{\partial s_2}{s_2}\wedge ..\wedge\frac{\bar\partial\rho_k}{\rho_k}\wedge\frac{\partial\rho_k}{\rho_k}\wedge ..\wedge\frac{\overline{\partial s_p}}{\bar s_p}\wedge\frac{\partial s_p}{s_p}\right)$$

$$-\lambda^{p-2}|s_1...s_p|^{2\lambda}\left(\sum_{k=1}^p\frac{\overline{\partial s_2}}{\bar s_2}\wedge ...\wedge\frac{\bar\partial\rho_k}{\rho_k}\wedge ...\wedge\frac{\overline{\partial s_p}}{\bar s_p}\wedge\frac{\partial s_2}{s_2}\wedge ...\wedge\frac{\partial s_p}{s_p}\right)$$

$$-\lambda^{p-2}|s_1...s_p|^{2\lambda}\left(\sum_{k=1}^p\frac{\overline{\partial s_2}}{\bar s_2}\wedge ...\wedge\frac{\overline{\partial s_p}}{\bar s_p}\wedge\frac{\partial s_2}{s_2}\wedge ...\wedge\frac{\partial\rho_k}{\rho_k}\wedge ...\wedge\frac{\partial s_p}{s_p}\right) \tag{3.7}$$

et où les autres termes $T_\lambda^{(\rho)}$ sur lesquels que nous allons commencer à étudier n'ont pas pour l'instant été explicités. En effet, ceux ci (qui d'ailleurs n'apparaissent que lorsque $p \geq 3$) ne contribuent pas au coefficient de λ^0 dans le développement du prolongement analytique de $\Gamma_\lambda^{(\rho)}$ au voisinage de l'origine; ceci se voit comme suit: pour chaque terme figurant dans le développement de $T_\lambda^{(\rho)}$, il existe deux indices *distincts* $j_1, j_2 \in \{2, ..., p\}$ tels que le terme se présente sous la forme

$$\lambda^{p-2}|s_1...s_p|^{2\lambda}\frac{\partial s_{j_1}}{s_{j_1}} \wedge \frac{\overline{\partial s_{j_2}}}{\overline{s_{j_2}}} \wedge \left(\bigwedge_{\substack{2\leq j\leq p \\ j\neq j_1,j_2}} \frac{\partial s_j \wedge \overline{\partial s_j}}{|s_j|^2}\right) \wedge \omega = \gamma_{j_1,j_2}(\lambda),$$

avec ω forme lisse. Pour étudier le prolongement analytique de

$$\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{C}^n} \gamma_{j_1,j_2}(\lambda) \wedge \omega \wedge \varphi \tag{3.8}$$

(φ désignant une forme test), nous reprenons le procédé que nous avons introduit lors de la preuve du théorème 1.3 de [BGY] et développé à nouveau en détail dans les preuves de la proposition 3.6 et du théorème 3.18 de [BGVY]. Afin d'être exhaustifs, nous en donnerons l'idée de bases ici. Nous poserons

$$\omega \wedge \varphi = \sum_\tau \xi_\tau \wedge \overline{\omega_\tau}$$

où les ξ_τ sont des $(n-p+2, 0)$ formes et les ω_τ des $(n-p+2, 0)$ formes à coefficients constants. L'idée consiste à étudier le problème localement (dans un ouvert U dans lequel φ a son support), de désingulariser l'hypersurface $s_1...s_p = 0$ (en introduisant une désingularisée $\mathcal{X}$ et la projection propre π correspondante) et à examiner ce qui se passe dans une carte locale dans laquelle, dans les nouvelles coordonnées w,

$$\pi^*(s_j)(w) = u_j(w) w_1^{\alpha_{j,1}} ... w_n^{\alpha_{j,n}} = u_j(w) w^{*\alpha_j},\ j = 1, ..., p.$$

L'expression (3.8) s'exprime comme une combinaison linéaire de deux sortes de termes. Les premiers (et les plus intéressants) sont du type

$$\lambda^{p-2}\int |w|^{*\lambda \sum_j \alpha_j} \frac{\partial w_{i_0}}{w_{i_0}} \wedge \frac{\overline{\partial w_{j_0}}}{\overline{w_{j_0}}} \wedge \left(\bigwedge_{i\in I}\frac{\partial w_i}{w_i}\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\in J}\frac{\overline{\partial w_j}}{\overline{w_j}}\right) \wedge \theta(w,\lambda)\overline{\pi^*(\omega_\tau)} \wedge \xi_\tau \tag{3.9}$$

où I et J sont des sous ensembles de $\{1, ..., n\}$ de cardinal $p-3$ et où la fonction $(w, \lambda) \longrightarrow \theta(w, \lambda)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en toutes les variables, à support compact en w et entière comme fonction de λ. De fait, si nous écrivons

$$\overline{\pi^*(\omega_\tau)} = \sum_{\substack{I' \subset \{1,...,n\} \\ \#I' = n-p+2}} \overline{\omega_{\tau,I'}} d\overline{w}_{J'}\ ,\ d\overline{w}_{J'} = \bigwedge_{j\in J'} d\overline{w_j}$$

(où les $\omega_{\tau,I'}$ sont des fonctions holomorphes dans la carte locale), nous voyons que nous pouvons remplacer dans (3.9) $\pi^*(\omega_\tau)$ par $\omega_{\tau,K} dw_K$, où $K = \{1,...,n\} \backslash \{\{j_0\} \cup J\}$, ce que nous ferons. Nous appelons $\mathcal{P}$ le sous ensemble de la carte défini par $\mathcal{P} = \{w_j = 0, j \in \{\{j_0\} \cup J\}\}$ et nous allons envisager les deux situations suivantes: soit $\pi(\mathcal{P})$ est inclus dans $\{s_2 = ... = s_p = 0\}$, soit il ne l'est pas. Dans la première de ces situations, puisque ω_τ est une $(n-p+2, 0)$ forme, sa restriction à la variété analytique de dimension $n-p+1$ définie par $s_2 = ... = s_p = 0$ est nulle, et l'on en déduit que $\omega_{\tau,K}$ s'annule sur $\mathcal{P}$, et que par conséquent il existe des fonctions y_j, $j \in \mathcal{P}$ holomorphes dans la carte et telles que $\omega_{\tau,K} = \sum_{j \notin K} y_j w_j$. Dès lors, le nombre de $\overline{w}_j$ que l'on a à "chasser" du dénominateur de (3.9) par des intégrations par parties (pour voir apparaitre l'expression du prolongement analytique au voisinage de l'origine comme fonction de λ) est au plus $p-3$, chacune de ces intégrations par parties consommant un facteur λ de λ^{p-2}; une fois ces $p-3$ intégrations par parties réalisées, nous voyons que le prolongement analytique de (3.9) au voisinage de $\lambda = 0$ se présente sous la forme $\lambda h(\lambda)$, où h est une fonction holomorphe au voisinage de *0*. Examinons maintenant ce qui se passe dans la seconde situation: comme on le voit tout de suite, de part les w_l qu'ils contiennent dans leurs expressions monomiales, tous les $\pi^*(s_j)$, $j = 2,...,n$, $j \neq i_0$, s'annulent sur $\mathcal{P}$; puisqu'il est exclu qu'il en soit aussi de même pour i_0 (nous sommes dans la seconde situation), l'indice i_0 ne figure pas dans $\{j_0\} \cup J$. Grâce à $p-3$ intégrations par parties dans (3.9) (qui nous "consomment" $p-3$ facteurs λ), nous chassons du dénominateur tous les $w_i, i \in I$; compte tenu de ce que nous venons de dire concernant i_0, le prolongement analytique de (3.9) (comme fonction de λ) se présente encore au voisinage de $\lambda = 0$ sous la forme $\lambda \longrightarrow \lambda h(\lambda)$, avec h holomorphe au voisinage de l'origine. Quant aux termes laissés pour compte dans le développement de (3.8), il s'agit d'expressions où le nombre, soit de w_j, soit de $\overline{w}_j$ figurant au dénominateur n'excède pas $p-3$; l'étude du prolongement analytique des fonctions de λ correspondantes se fait comme pour les expressions du type (3.9), dans la première situation évoquée ci dessus. Pour conclure, nous voyons que la fonction non explicitée $\lambda \longrightarrow T_\lambda^{(\rho)}$ admet au voisinage de $\lambda = 0$ un prolongement analytique de la forme $\lambda \longrightarrow \lambda\Theta(\lambda)$, où Θ est une application à valeurs courants holomorphe au voisinage de $\lambda = 0$. En conséquence, l'expression $(\rho_1...\rho_p)^{-\lambda} T_\lambda^{(\rho)}$ ne contribue pas au coefficient de λ^0 dans le développement de Laurent de $\lambda \longrightarrow \Gamma_\lambda^{(\rho)}$ au voisinage de l'origine. En utilisant des techniques semblables, nous montrons également que $\lambda \longrightarrow W_\lambda^{(\rho)}$ se prolonge en une application à valeurs courants holomorphe au voisinage de l'origine; on notera $W_0^{(\rho)}$ la valeur en *0* de ce prolongement; avec un peu plus de soin, on montre que l'on ne modifie pas la valeur de $W_0^{(\rho)}$ si dans l'expression de $W_\lambda^{(\rho)}$, on remplace $|s_1...s_p|^{2\lambda}$ par $|s_2...s_p|^{2\lambda}$, ce qui donne une nouvelle fonction $\lambda \longrightarrow \widetilde{W}_\lambda^{(\rho)}$, telle que $W_0^{(\rho)} = \widetilde{W}_0^{(\rho)}$. Cette remarque nous servira un peu plus loin.

Nous avons vu lorsque nous avons construit les courants de Green dans le cadre affine que le développement de Laurent de $\lambda \longrightarrow c_p R_\lambda$ au voisinage de $\lambda = 0$ s'écrit

$$\frac{\delta_{\mathcal{D}_2 \cap ... \cap \mathcal{D}_p}}{\lambda} + c_p R_0 + \lambda \widetilde{R}(\lambda),$$

où $\lambda \longrightarrow \widetilde{R}(\lambda)$ est holomorphe au voisinage de *0* et où R_0 est un courant tel que

$$dd^c(c_p R_0) = \delta_{\mathcal{D}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p}.$$

Si maintenant nous examinons le développement de Laurent de $\lambda \longrightarrow \Gamma_\lambda^{(\rho)}$ au voisinage de *0*, soit

$$c_p\big(1 - \lambda ln(\rho_1 \ldots \rho_p) + \lambda^2(\ldots)\big)\left(\frac{\delta_{\mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p}}{\lambda} + R_0 + W_0^{(\rho)} + \lambda(\ldots)\right),$$

nous voyons que le courant $\Gamma_0^{(\rho)}$ correspondant au coefficient de λ^0 dans le développement de Laurent de $\lambda \longrightarrow \Gamma_\lambda^{(\rho)}$ au voisinage de *0* satisfait

$$dd^c(\Gamma_0^{(\rho)}) = \delta_{\mathcal{D}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p} - \left(\sum_{k=1}^{p} c_1(\rho_k)\right) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p} + S_0^{(\rho)}$$

où $S_0^{(\rho)} = dd^c(c_p W_0^{(\rho)})$.

Il reste maintenant à calculer $dd^c(W_0^{(\rho)}) = dd^c(\widetilde{W}_0^{(\rho)})$. Pour plus de simplicité, nous écrirons

$$\widetilde{W}_\lambda^{(\rho)} = \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),1} - \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),2} - \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),3}$$

en respectant la décomposition en trois sommes figurant dans (3.7) (on a simplement remplacé $|s_1 \ldots s_p|^{2\lambda}$ par $|s_2 \ldots s_p|^{2\lambda}$).

On voit facilement que

$$c_p \widetilde{W}_0^{(\rho),1} = (2i\pi) \sum_{k=2}^{p} \delta_{\mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \widehat{\mathcal{D}_k} \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p} \wedge \frac{\bar{\partial}\rho_k}{\rho_k} \wedge \frac{\partial \rho_k}{\rho_k}$$

(toujours en utilisant l'argument qui nous a permis de remplacer $W_\lambda^{(\rho)}$ par $\widetilde{W}_\lambda^{(\rho)}$) et par conséquent que

$$dd^c(c_p \widetilde{W}_0^{(\rho),1}) = -\sum_{k=2}^{p} c_1^2(\rho_k) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2 \cap \ldots \cap \widehat{\mathcal{D}_k} \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p}.$$

Nous pouvons réécrire $-c_p \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),2}$ sous la forme

$$-c_p \frac{2^{2(p-2)}}{\lambda^{p-1}} \left(\sum_{k=2}^{p} \bar{\partial}|s_2|^\lambda \wedge .. \wedge \bar{\partial} ln(\rho_k) \wedge .. \wedge \bar{\partial}|s_p|^\lambda \wedge \partial |s_2|^\lambda \wedge .. \wedge \partial |s_k|^{2\lambda} \wedge .. \wedge \partial |s_p|^\lambda\right),$$

expression qui se trouve congrue (pour $Re(\lambda) >> 0$) modulo les formes exactes à

$$-\frac{c_p'}{\lambda^{p-1}} \left(\sum_{k=2}^{p} |s_k|^{2\lambda} \bar{\partial}|s_2|^\lambda \wedge .. \wedge \partial\bar{\partial} ln(\rho_k) \wedge .. \wedge \bar{\partial}|s_p|^\lambda \wedge \partial |s_2|^\lambda \wedge .. \wedge \widehat{\partial |s_k|^\lambda} \wedge .. \wedge \partial |s_p|^\lambda\right),$$

où $c'_p = (-1)^p 2^{2(p-2)}$; en effet, cette dernière expression (que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$Y_\lambda^{(\rho)} = -(-1)^p c_p \lambda^{p-3} |s_2 ... s_p|^{2\lambda} \left(\sum_{k=2}^{p} \partial\bar{\partial} ln(\rho_k) \wedge \prod_{\substack{2 \le l \le k \\ l \neq k}} \left(\frac{\overline{\partial s_l}}{\bar{s}_l} \wedge \frac{\partial s_l}{s_l} \right) \right)$$

plus maniable par la suite) est telle que

$$Y_\lambda^{(\rho)} + c_p \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),2} = \partial(U_\lambda^{(\rho)}),$$

où, au signe près, on a

$$U_\lambda^{(\rho)} = \frac{c'_p}{\lambda^{p-1}} |s_k|^{2\lambda} \bar{\partial}|s_2|^\lambda \wedge ... \wedge \bar{\partial} ln(\rho_k) \wedge ... \wedge \bar{\partial}|s_p|^\lambda \wedge \bigwedge_{\substack{2 \le l \le p \\ l \neq k}} \partial |s_l|^\lambda.$$

On a donc, en prenant les coefficients de λ^0 dans le développement du prolongement analytique au voisinage de $\lambda = 0$,

$$Y_0^{(\rho)} + c_p \widetilde{W}_0^{(\rho),2} = \partial(U_0^{(\rho)}),$$

d'où

$$dd^c(-c_p \widetilde{W}_0^{(\rho),2}) = dd^c(Y_0^{(\rho)}).$$

On retrouve, dans l'expression du $k^{ème}$ terme figurant dans la somme $Y_\lambda^{(\rho)}$, l'expression en λ qui donne, quand on en considère le coefficient de λ^0 dans le développement du prolongement analytique autour de l'origine, un courant de Green relatif à $\mathcal{D}_2 \cap ... \cap \mathcal{D}_p$; ainsi

$$dd^c(Y_0^{(\rho)}) = -(-1)^p \frac{c_p}{c_{p-1}} \left(\sum_{k=2}^{p} \partial\bar{\partial} ln(\rho_k) \right) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2 \cap ... \cap \mathcal{D}_p} = \left(\sum_{k=2}^{p} c_1(\rho_k) \right) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2 \cap ... \cap \mathcal{D}_p}.$$

En répétant un raisonnement analogue avec $-c_p \widetilde{W}_\lambda^{(\rho),3}$, on montre que, pour $j = 2, 3$,

$$dd^c(-c_p \widetilde{W}_0^{(\rho),j}) = \left(\sum_{k=2}^{p} c_1(\rho_k) \right) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2 \cap ... \cap \mathcal{D}_p},$$

et nous venons par conséquent de prouver le lemme suivant:

Lemme 3.1

Le courant $\Gamma_0^{(\rho)}$ *satisfait la relation*

$$dd^c(\Gamma_0^{(\rho)}) = \delta_{\mathcal{D}_1\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} - \left(c_1(\rho_1) - \sum_{k=2}^{p} c_1(\rho_k)\right) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} -$$

$$-\sum_{k=2}^{p} c_1^2(\rho_k) \wedge \delta_{\mathcal{D}_2\cap\ldots\cap\hat{\mathcal{D}}_k\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p}.$$

Une itération de ce lemme fournit une solution $\mathbf{G}$ de notre équation (3.5). Supposons en effet que l'on sache construire une telle solution lorsque la codimension du cycle est strictement inférieure à p; on peut donc trouver un courant $\widetilde{\mathbf{G}}$ et des courants $\mathbf{G}_2, ..., \mathbf{G}_p$, tous obtenus via le prolongement analytique, tels que

$$dd^c(\widetilde{\mathbf{G}}) + \delta_{\mathcal{D}_2\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} = c_1(\rho_2) \wedge \ldots \wedge c_p(\rho_p)$$

et que

$$dd^c(\mathbf{G}_k) + \delta_{\mathcal{D}_2\cap\ldots\cap\hat{\mathcal{D}}_k\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} = \bigwedge_{\substack{2\leq l\leq p \\ l\neq k}} c_1(\rho_l);$$

alors, le courant $\mathbf{G}$ défini par

$$\mathbf{G} = -\Gamma_0^{(\rho)} + \left(c_1(\rho_1) - \sum_{k=2}^{p} c_1(\rho_k)\right) \wedge \widetilde{\mathbf{G}} + \sum_{k=2}^{p} c_1^2(\rho_k) \wedge \mathbf{G}_k$$

satisfait

$$dd^c\mathbf{G} + \delta_{\mathcal{D}_1\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} = \bigwedge_{l=1}^{p} c_1(\rho_l),$$

ce qui correspond bien à (3.5).

Cette construction peut par exemple être faite dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ est la variété $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ et où les sections s_j correspondent à des polynômes homogènes de degrés respectifs $D_1, ..., D_p$. Le courant $\mathbf{G}$ est alors dans ce cas solution de

$$dd^c(\mathbf{G}) + \delta_{\mathcal{D}_1\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p} = D_1...D_p\,(dd^c ln(||X||^2))^p.$$

Nous dirons qu'un tel courant $\mathbf{G}$ est un courant de Green pour le cycle $\mathcal{D}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{D}_p$ (les multiplicités sont prises en compte) *atteint via le prolongement analytique à un paramètre* λ. Remarquons que la fonction méromorphe dont provient $dd^c\mathbf{G}$ (dans la construction que nous venons de faire) est holomorphe à l'origine; tous les courants de Green atteints via le prolongement analytique et que nous considérerons par la suite auront toujours cette propriété.

Nous resterons maintenant dans le cadre de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Les courants de Green correspondant à un cycle effectif X (de codimension p) et atteints via le prolongement analytique à un paramètre sont bien sûr tels que leurs projections sur l'orthogonal de l'espace des p,p formes harmoniques sont toutes congrues entre elles modulo $\partial\mathcal{A}^{p-1,p}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))+\overline{\partial}\mathcal{A}^{p,p-1}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$. Nous avons le résultat plus précis suivant:

Proposition 3.2

Soient G_1 et G_2 deux courants de Green de type (p,p) associés au cycle X de codimension $p+1$ ($dd^cG_j+\delta_X = deg(X)\omega^{p+1}$, $j=1,\ 2$, $\omega = dd^c(ln(||X||^2))$); on suppose que $G_j = (\Phi_j^{(\lambda)})_{\lambda=0}$, où, pour $Re(\lambda) >> 0$, $\Phi_j^{(\lambda)}$ s'écrit localement sous la forme d'une combinaison de termes $\lambda^q u^{\lambda-M}\theta$, avec u fonction réelle analytique positive et θ forme lisse, $q\in\mathbb{Z}$, $M\in\mathbb{N}$. Les courants G_1 et G_2 sont supposés atteints à partir des expressions précédentes via le prolongement analytique à un paramètre. Il existe alors deux applications $\lambda \longrightarrow U^{(\lambda)}$, $\lambda \longrightarrow V^{(\lambda)}$ de $Re(\lambda) >> 0$ à valeurs dans l'espace des courants à coefficients localement intégrables et de types respectifs $(p-1,p)$, $(p,p-1)$, se prolongeant méromorphiquement à $\mathbb{C}$ et telles que

$$G_1 - G_2 = \left(\partial U^{(\lambda)} + \bar\partial V^{(\lambda)}\right)_{\lambda=0} + \left(\int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})} (G_1-G_2)\wedge\omega^{n-p}\right)\omega^p \qquad (3.10)$$

Preuve

Si l'on introduit la projection harmonique H, notons

$$\mathcal{G} = (G_1-G_2) - H(G_1-G_2) = (\Psi^{(\lambda)})_{\lambda=0},$$

où $\Psi^{(\lambda)}$ est localement une combinaison d'expressions de la forme $|u_1|^{\lambda-M}\omega_1 - |u_2|^{\lambda-N}\omega_2 + c\omega^p$ dont on suit le prolongement analytique. Compte tenu des hypothèses faites sur les G_j (et en particulier le l'holomorphie de $dd^c(\Phi_j^{(\lambda)})$ au voisinage de *0*), nous pouvons écrire le prolongement de $\overline{\partial}\partial\Psi^{(\lambda)}$ au voisinage de $\lambda=0$ sous la forme $\lambda R(\lambda)$, où R est une application holomorphe dans un voisinage de *0*, à valeurs dans l'espace des courants de type $\mathcal{A}^{p,p}(\mathbf{P}^n(\mathbb{C}))$. On peut supposer $\Psi^{(\lambda)}$ orthogonale aux formes harmoniques pour toute valeur du paramètre λ. On peut utiliser la décomposition de Hodge et écrire, pour $Re(\lambda) >> 0$,

$$\bar\partial(\Psi^{(\lambda)}) = \bar\partial\left(\bar\partial^*(G_{\bar\partial,p,p-1}(\bar\partial\Psi^{(\lambda)}))\right);$$

on redécompose (comme dans [GRH], chapitre 0) avec l'opérateur de Hodge Δ_∂, pour obtenir:

$$\bar\partial(\Psi^{(\lambda)}) = v\bar\partial\left(\Delta_\partial\left(G_{\partial,p,p}(\bar\partial^*(G_{\bar\partial,p,p-1}(\bar\partial\Psi^{(\lambda)})))\right)\right). \qquad (3.11)$$

Mais l'on remarque que

$$\partial\left(\bar\partial^*(G_{\bar\partial,p,p-1}(\bar\partial\Psi^{(\lambda)})\right) = -\bar\partial^*\left(G_{\bar\partial,p,p-1}(\partial\bar\partial\Psi^{(\lambda)})\right) = \Theta(\lambda). \qquad (3.12)$$

Il est facile de voir que l'application à valeurs dans l'espace des courants $\lambda \longrightarrow \Theta(\lambda)$ se prolonge en une application méromorphe dans tout le plan complexe et que compte tenu de la forme du prolongement de $\partial\bar{\partial}(\Psi^{(\lambda)})$, on peut écrire le prolongement de Θ au voisinage de l'origine sous la forme

$$\lambda \longrightarrow \lambda\Theta_1(\lambda),$$

où Θ_1 est holomorphe au voisinage de l'origine. Mettant ensemble cette remarque, (3.11) et (3.12), il vient que l'on peut écrire

$$\bar{\partial}\Psi^{(\lambda)} = \partial\bar{\partial}(\alpha^{(\lambda)}) + \lambda\beta^{(\lambda)} \tag{3.13}$$

où $\lambda \longrightarrow \alpha^{(\lambda)}$, $\lambda \longrightarrow \beta^{(\lambda)}$ se prolongent en des applications méromorphes à valeurs dans l'espace des courants, le prolongement de $\lambda \longrightarrow \beta^{(\lambda)}$ étant holomorphe au voisinage de l'origine. On répète le raisonnement pour $\partial\Psi^{(\lambda)}$, que l'on représente sous la forme

$$\partial\Psi^{(\lambda)} = \bar{\partial}\partial(\gamma^{(\lambda)}) + \lambda\delta^{(\lambda)} \tag{3.14}$$

et l'on conclut, comme dans la preuve du théorème 1.2.2 de [GS1], que l'on peut écrire

$$\Psi^{(\lambda)} = -\partial\alpha^{(\lambda)} - \bar{\partial}\gamma^{(\lambda)} + \lambda\xi^{(\lambda)} + \omega^{(\lambda)}, \tag{3.15}$$

où toutes les fonctions de λ se prolongent méromorphiquement, avec le prolongement de $\lambda \longrightarrow \xi^{(\lambda)}$ holomorphe au voisinage de *0*, et où $\omega^{(\lambda)}$ est harmonique; comme la projection de $\Psi^{(\lambda)}$ sur l'espace des formes harmoniques est nulle, on a bien la conclusion en identifiant les coefficients de λ^0 dans le développement en série de Laurent des deux membres de (3.15) au voisinage de l'origine. De plus, on peut expliciter les formes différentielles $\alpha^{(\lambda)}$, $\gamma^{(\lambda)}$ pour $Re(\lambda) >> 0$ en faisant apparaitre l'opérateur de Green; la régularité du noyau hors de la diagonale implique les propriétés de régularité de ces courants pour $Re(\lambda) >> 0$. □

Notre objectif ultérieur, avec cette approche des courants de Green via le prolongement analytique, est de comprendre différemment le produit introduit par Gillet et Soulé dans leur étude des groupes de Chow arithmétiques. Rappelons qu'il s'agit ([GS1], [BGS2]), en ce qui concerne l'aspect analytique du problème, lorsque X et Y sont deux cycles, pour lesquels on dispose de courants de Green (atteints par exemple via le prolongement analytique), de définir $\delta_Y \wedge G_X + H(\delta_X) \wedge G_Y$, soit $(H(\delta_Y) - dd^c G_Y) \wedge G_X + H(\delta_X) \wedge G_Y$, ce qui se ramène à définir correctement $dd^c(G_Y) \wedge G_X$ (ce produit est défini dans les travaux de Gillet et Soulé à partir de courants de Green particulier, ceux qui correspondent à des fonctions régulières hors du support du cycle et à singularité logarithmique une fois les singularités du cycle résolues). Les deux problèmes à résoudre sont, d'une part, la construction de courants de Green atteints via le prolongement analytique (à un ou plusieurs paramètres), ce que nous venons de faire dans le cas très simple des intersections complètes, d'autre part, la construction d'un produit; on observera que lorsque X et Y sont deux cycles intersection complète se coupant proprement, la méthode qui consiste à atteindre G_Y comme dans le lemme ($G_Y = (\Phi^{(\lambda)})_{\lambda=0}$) et G_X de la même manière conduit à définir naturellement $dd^c(G_Y) \wedge G_X$ par

$$dd^c(G_Y) \wedge G_X = (dd^c(\Phi^{(\lambda)}) \wedge \Psi^{(\lambda)})_{\lambda=0}.$$

Si un tel procédé existe, la contribution analytique au calcul de la hauteur arithmétique ([Fa], [BGS1]) d'un cycle de $\mathbf{P}^n = Proj(\mathbb{Z}[X_0, ..., X_n])$ serait donnée sous une forme où l'on verrait apparaitre explicitement le prolongement analytique des distributions

$$\prod \left(\frac{|P_j|}{||X||^{D_j}} \right)^{\lambda_j},$$

où les P_j sont des générateurs de l'idéal homogène correspondant au cycle (et l'on retrouverait les équations fonctionnelles pour estimer, voire calculer, dans des cas simples les intégrales). C'est ce qui se passe pour les cycles lisses et intersection complète (définis par exemple par une collection de polynômes homogènes $P_1, ..., P_m$ tous de même degré D). Dans ce cas particulier, la formule classique de Levine [Sto], [GS2], peut aussi s'écrire en termes du prolongement analytique sous la forme

$$dd^c \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{||P(X)||^2}{||X||^{2D}} \right)^{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{m-1} (Ddd^c(ln(||X||^2))^{m-1-k} \wedge \left(dd^c(ln(||P(X)||^2) \right)^k \right) \right)_{\lambda=0} =$$

$$= \delta_{\{P_1 = ... = P_m = 0\}} - \left(Ddd^c(ln(||X||^2)) \right)^m, \tag{3.16}$$

où $||P||^2 = \sum |P_j|^2$; en effet, posons

$$\alpha(X) = dd^c(ln(||P(X)||^2), \ \beta(X) = D\omega(X), \ \gamma(X) = \frac{||P(X)||^2}{||X||^{2D}};$$

on a

$$dd^c \left(\frac{\gamma^\lambda}{\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k \wedge \beta^{m-1-k} \right) = \gamma^\lambda \left(\alpha - \beta + \frac{i}{2\pi} \partial\gamma \wedge \bar{\partial}\gamma \right) \left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k \wedge \beta^{m-1-k} \right) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \lambda \gamma^\lambda \left(\sum_{k=0}^{m-1} \partial\gamma \wedge \bar{\partial}\gamma \wedge \alpha^k \wedge \beta^{m-1-k} \right) - \gamma^\lambda \beta^m; \tag{3.17}$$

on peut écrire cette dernière expression sous la forme

$$\frac{i}{2\pi} \lambda \gamma^\lambda \partial\gamma \wedge \bar{\partial}\gamma \wedge \alpha^{m-1} + \ H(\lambda)$$

et vérifier que lorsque le cycle est lisse, $H(\lambda) = \lambda K(\lambda)$, où K est holomorphe au voisinage de l'origine; en revanche, ceci n'a à priori aucune raison d'être le cas lorsque cette condition n'est pas remplie; le terme $H(\lambda)$ donne (lorsque l'on étudie son prolongement analytique comme fonction de λ) une contribution au coefficient de λ^0 dans le développement en série de Laurent au voisinage de l'origine. En revanche, on voit (comme conséquence des formules de Bochner-Martinelli) que, dès que les diviseurs se coupent proprement,

$$\frac{i}{2\pi}\Big(\lambda\gamma^\lambda\partial\gamma\wedge\bar\partial\gamma\wedge\alpha^{m-1}\Big)_{\lambda=0}=\delta_{\mathcal{D}_1\cap\ldots\cap\mathcal{D}_p}.$$

Dans le cas lisse, on a donc bien prouvé (3.16); le fait que H contribue à une contribution non triviale dans le cas singulier nous empêche de prouver (3.16) dans ce cas. Il existe cependant vraisemblablement une solution du même type à l'équation (3.5) dans ce cas.

Lorsqu'elle est valide, la formule (3.16) permet le calcul explicite de la hauteur de Faltings du cycle (que nous noterons $\mathcal{Z}$). C'est ce que nous allons faire dans le cas d'un cycle défini comme une intersection complète à partir de polynômes homogènes P_j, $j=1,\ldots,m$, à coefficients entiers, tous de même degré D; nous supposerons aussi que les P_j définissent une sous variété lisse de $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$. Pour cela, notons

$$\Omega_\lambda=\frac{\gamma^\lambda}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha^k\wedge\beta^{m-1-k}\right).$$

Prenons $n+1-m$ hyperplans génériques $L_{m+1},\ldots,L_{n+1}$ (définissant un sous espace générique L et un cycle $\mathcal{Z}_L$ de $\mathbf{P}^n$) de manière à pouvoir calculer un représentant de la classe de Chow $(\widehat{c}_1)^{n+1-m}.\widehat{c}(\mathcal{Z})$; nous prenons comme représentant de $(\widehat{c}_1)^{n+1-m}$ le couple $(\mathcal{Z}_L,G_L)$ (où G_L est construit via la formule de Levine) et comme représentant de $\widehat{c}(\mathcal{Z})$ le couple $(\mathcal{Z},-\Omega_0+H(\Omega_0))$, soit encore $(\mathcal{Z},-\Omega_0+C(P)\omega^{m-1})$, avec

$$C(P)=\left(\int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\Omega_\lambda\wedge\omega^{n+1-m}\right)_{\lambda=0}.$$

Comme représentant du produit, nous prendrons le couple

$$(\mathcal{Z}.\mathcal{Z}_L,\ \delta_L\wedge\left(-\Omega_0+C_P\omega^{m-1}\right)+(D\omega)^m\wedge G_L)$$

(notons qu'il n'y a pas de problème de multiplication car $-\Omega_0$ est lisse au voisinage de L et vaut d'ailleurs

$$-\Omega_0=-ln\left(\frac{||P||^2}{||X||^{2D}}\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\left(dd^c(ln(||P||^2)\right)^k\wedge(D\omega)^{m-1-k}\right)).$$

Telle qu'elle est définie par exemple par Faltings [Fa] ou Bost, Gillet, Soulé [BGS1], la hauteur arithmétique du cycle vaut

$$ln(ord(\Gamma(\mathcal{Z}.\mathcal{Z}_L,\ \mathcal{O}_{\mathcal{Z}.\mathcal{Z}_L})))+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\int_L\Omega_0\ +C(P)+D^m\int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\omega^m\wedge G_L\right).$$

On peut utiliser le prolongement analytique pour calculer $C(P)$ et $\int_L\Omega_0$; quant au terme

$$\int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\omega^m\wedge G_L\ ,$$

il se calcule en utilisant le fait que la hauteur arithmétique du cycle $\mathcal{Z}$ vaut

$$h(\mathbf{P}^{n-m}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} = C(n,m)$$

(voir [BGS1] ou [GS2], section 5); en reprenant la formule de Gillet-Soulé (mais pour exprimer cette fois la hauteur de $\mathbf{P}^{n-m}$, on a, si Λ_m désigne la forme de Levine de type (m,m),

$$C(n,m) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbf{P}^m(\mathbb{C})}\Lambda_m - \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\Lambda_m\wedge\omega^{n-m} + \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\omega^m\wedge G(L)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=0}^{n-m}\frac{1}{\nu+\mu} + \int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\omega^m\wedge G(L)\right),$$

d'où

$$\int_{\mathbf{P}^n(\mathbb{C})}\omega^m\wedge G(L) = 2\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n-m}\frac{1}{\nu+\mu}\,.$$

Ceci achève le calcul de la hauteur dans le cas d'un cycle intersection complète lisse. Nous terminerons en mentionnant que le souçi que nous avons d'introduire le prolongement analytique pour mesurer la complexité arithmétique d'un cycle est orienté vers l'idée que nous avons d'étendre ces méthodes aux cas de certaines situations transcendantes (par exemple pour approfondir les aspects géométriques de la théorie des exponentielles polynômes [BY3]) où les équations fonctionnelles du type Bernstein-Sato peuvent être exploitées pour calculer le prolongement analytique de manière globale et non plus locale.

§4. Références bibliographiques

[Aiz] L.A. Aizenberg & A.P. Yuzhakov, *Integral Representation in Multidimensional Complex Analysis* , Translations of Amer. Math. Soc. **58** , 1980.

[Be] D.N. Bernstein, The number of roots of a system of equations, *Functional Analysis and its Applications* **9** (1975), no. 2, 183-185.

[BGS1] J.B. Bost, H. Gillet & C. Soulé, Un analogue arithmétique du théorème de Bezout, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **312** (1991), 845-848.

[BGS2] J.B. Bost, H. Gillet & C.Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, *Preprint IHES* (1993).

[BGVY] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Yger & A. Vidras, *Residue currents and Bezout identities,* à paraitre dans Progress in Maths, Birkhäuser.

[BGY] C.A. Berenstein, R.Gay & A. Yger, Analytic continuation of currents and Division problems, *Forum Math.* **1** (1989), 15-51.

[BY1] C.A. Berenstein & A. Yger, Effective Bezout identities in $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_n]$, *Acta Math.* **166** (1991), 69-120.

[BY2] C.A. Berenstein & A. Yger, Une formule de Jacobi et ses conséquences, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris* **24** (1991), 363-377.
[BY3] C.A. Berenstein & A. Yger, Exponential polynomials and $\mathcal{D}$-modules, *Preprint* (1992).
[CoH] N. Coleff et M. Herrera, *Les courants résidus associés à une forme méromorphe,* Lect. Notes in Math. **633**, Springer Verlag, New York (1978).
[De] J. Delsarte, Théorie des fonctions moyennes périodiques de deux variables, Ann. of Math. **12** (1960), 121-178.
[Dick] A. Dickenstein & C. Sessa, An effective residual criterion for the membership problem in $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, *J. of Pure and Applied Algebra* **74** (1991), 149-158.
[DP] J.P. Demailly & M. Passare, Courants résiduels et classe fondamentale, *Preprint.*
[Elk] M. Elkadi, Bornes pour les degrés et les hauteurs dans le problème de division, à paraitre *Michigan Math. J.*
[Fa] G. Faltings, Diophantine approximation on Abelian varieties, *Ann. of Math.* **133** (1991), 549-576.
[GiH] N. Fitchas, M. Giusti, F. Smietanski, Sur la complexité du théorème des zéros, *Preprint* (1993).
[GR] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 1980.
[GRH] P. Griffiths & J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley Interscience, New York, 1978.
[GS1] H. Gillet & C. Soulé, Arithmetic intersection theory, *Publ. Math. I.H.E.S.,* **72** (1990), 94-174.
[GS2] H. Gillet & C. Soulé, Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric, I,II, *Ann. of Math.* **131** (1990), 163-203, 205-238.
[Ho] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Complex Variables,* North Holland, Amsterdam (1973).
[Kh] A.G. Khovanskii, Newton polyedra and the Euler-Jacobi formula, *Russian Math Surveys* **33** (1978), no 6, 237-238.
[Ph] P. Philippon, Sur des hauteurs alternatives I, *Math. Ann.* **289** (1991), 255-283.
[So] C. Soulé, Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants, *Astérisque* **198-199-200**, 355-371.
[Sto] W. Stoll, About the value distribution of holomorphic maps into projective space, *Acta Math.* **123** (1969), 166-183.
[Stu] B. Sturmfelds, Sparce elimination theory, in *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra* (D. Eisenbud & L. Robbiano, Eds), Proceedings Cortona (June 1991), Cambridge University Press, à paraitre.